

## 最適化数学 A

(251S1517)

## 参考資料 [1]

キーワード

内積, 連立 1 次方程式, 連立 1 次不等式, 超平面, 半空間, アフィン集合, 行ベクトル, 列ベクトル

## 1 内積と連立 1 次方程式の領域表示

## 1.1 ユークリッド空間における内積

高等学校で学んでいたように, 2つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  と  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  の内積は  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2$  で与えられていた。このことを一般化して, 内積を次のように定義する。まず,  $n$

個の実数の組  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  を  $n$  次元数ベクトル (vector) という。  $n$  次元数ベクトルの全体を  $n$  次元

数ベクトル空間 (vector space) といい,  $\mathbb{R}^n$  で表す。  $\mathbb{R}^n$  は, (実)ベクトル空間の公理を満たすので

でこのように呼ばれる。  $n$  次元数ベクトルを表すのに, 転置記号を使って,  $(x_1, \dots, x_n)^T$  と表し, 転置記号を省略することもある。また, 誤解が生じなければ, ベクトルは矢印記号をつけずに, 太字  $x, y, \dots$  など表すこととする。このとき,  $n$  次元数ベクトル  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  と

$y = (y_1, \dots, y_n)^T$  に対して,  $x^T y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \quad \left( = \sum_{i=1}^n x_iy_i \right)$  が以下の内積の公理を

満たすので  $x$  と  $y$  の内積 (inner product) という。記号として  $x^T y$  の他にも  $\langle x, y \rangle$  または,  $(x|y)$  等の表し方がある。確かに, 標準基底に対して, そのように内積を定義するとその基底は正規直交系となるし, 逆に, 基底を正規直交系に選ぶと内積はそのように表されることが容易に示される。そこで, そのようなベクトル空間をユークリッド空間 (Euclidean space) といい,  $\mathbb{R}$  で表すこともある。また, 内積の定義されたベクトル空間を一般に内積空間 (inner product space) または計量ベクトル空間と呼ぶ。

## 内積の公理

- (1) すべての  $x$  について,  $\langle x, x \rangle \geq 0$  が成り立ち, 特に  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2) すべての  $x, y, z$  について,  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- (3) すべての  $x, y$  とスカラー  $\alpha$  について,  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- (4) すべての  $x, y$  について,  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (実ベクトル空間のとき)

よって,  $n$  次元数ベクトル  $x$  に対して,  $x$  の大きさ  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  (つまり,  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ) が定義できて, ノルムの公理を満たす。ノルムの定義されたベクトル空間  $X$  をノルム空間といい, そのノルム  $\|\cdot\|$  とあわせて,  $(X, \|\cdot\|)$  と表す。一般に, 内積からノルムが上記のように定義できるので, 次のような不等式が内積空間では成立する。

## コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

実内積空間 (ユークリッド空間)  $X$  における 2つのベクトル  $x, y \in X$  に対して,

$$-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|, \quad (\text{つまり, } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|)$$

が成り立つ。ただし, ここでは  $|\cdot|$  は絶対値を表す記号である。等号が成立するのは,  $x$  と  $y$  が 1 次従属になるときに限る。

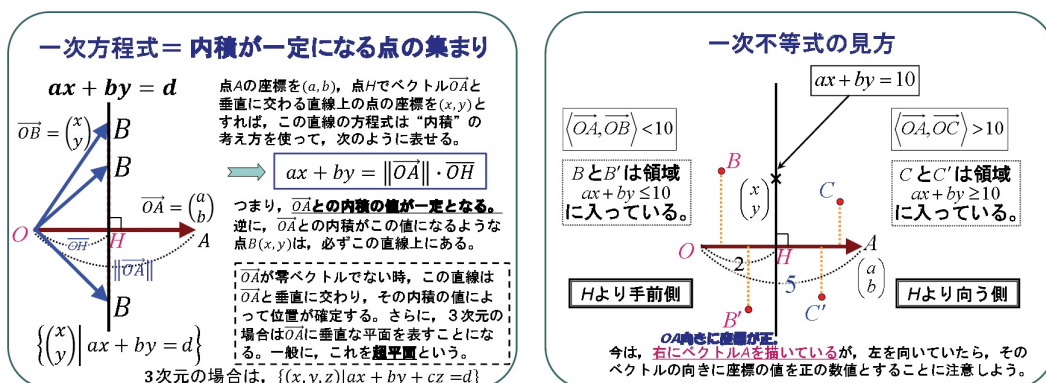
## 1.2 内積による1次方程式と1次不等式の見方

次に、高等学校で学んだ内積を振り返ってみよう。ここでは、矢印記号をつけた表記でベクトルを表そう。まず、2変数の1次関数  $f(x,y) = ax + by$  を取り上げる。これは、ベクトル  $\vec{n} = (a,b)$  と  $\vec{p} = (x,y)$  の内積と考えられる。高等学校では、「内積」の定義は  $\vec{n} \cdot \vec{p} = |\vec{n}| \cdot |\vec{p}| \cdot \cos \theta$  (ただし、 $\theta$  は2つのベクトルのなす角) としていて、余弦定理から  $\vec{n} \cdot \vec{p} = ax + by$  を証明した。つまり、内積  $\vec{n} \cdot \vec{p}$  は最初から  $|\vec{n}|$  と  $|\vec{p}| \cdot \cos \theta$  の積と考えた方が自然である。

この考えに基づくと、関数  $f(x,y)$  の等高線  $ax + by = d$  はベクトル  $\vec{n} = (a,b)$  と直交する直線となるので、この  $\vec{n}$  を  $f$  の法線ベクトルと呼んでいる。また、 $d$  の値を増加させるとその直線は法線ベクトルの向きに平行移動し、逆に、 $d$  の値を減少させると法線ベクトルとは逆向きに平行移動することがわかる。これにより、法線ベクトルが関数  $f(x,y)$  の増加方向、すなわち、勾配ベクトルとなっている。

また、等式  $ax + by = d$  はベクトル  $\vec{n} = (a,b)$  と  $\vec{p} = (x,y)$  の内積の値でもあるので、ベクトル  $\vec{n}$  と  $\vec{p}$  の内積の値が一定となるようなベクトル  $\vec{p}$  の集まりを表していると考えられる。

さらに、不等式  $ax + by \leq d$  は  $\vec{n}$  と  $\vec{p}$  の内積の値が  $d$  以下となるベクトル  $\vec{p}$  の集まりを表すと考えられ、一定になる所から手前側、逆に、不等式  $ax + by \geq d$  は一定になる所から向こう側の領域とみなすことができる。以上のことにより、ベクトル  $\vec{n} = (a,b)$  と定数  $d$  を決めると、 $\vec{n}$  に直交する直線がただ一つ定まり、平面全体がその直線によって半分の領域に分割される。



一般に、連立方程式の解集合は一つひとつの方程式の解の集まりの共通部分を考えればよいし、連立不等式の解集合も一つひとつの不等式の解の集まりの共通部分となる。このような考えを利用すると、連立一次方程式や連立一次不等式の領域表示を容易に描くことが可能となる。

ただし、連立一次方程式については次の節で述べるように色々な解釈ができ、そのような見方は最適化問題を考える際には重要である。

## 1.3 連立1次方程式の2通りの解釈

一般に、連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は次のように行列とベクトルの表記を利用して  $Ax = b$  と簡約な表現で表すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

この行列  $A$  を上の連立 1 次方程式の**係数行列**といい、行ベクトルで解釈するか、列ベクトルで解釈するかで以下のような 2通りの見方ができる。

#### (1) $Ax = b$ を超平面の共通部分（アフィン集合）とみる方法

行列  $A$  を  $m \times n$  とし、その行ベクトルを  $p_1^T, \dots, p_m^T$  とし、 $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  とすると、連立 1 次方程式  $Ax = b$  は次のように表せる。

$$\begin{cases} p_1^T x = b_1 & (\text{ベクトル } p_1 \text{ との内積の値が一定の値 } b_1 \text{ となる解 } x) \\ \vdots \\ p_m^T x = b_m & (\text{ベクトル } p_m \text{ との内積の値が一定の値 } b_m \text{ となる解 } x) \end{cases}$$

よって、それぞれの係数ベクトル  $p_k$  が零ベクトルではない場合は、 $Ax = b$  の解集合はいくつかの超平面の共通部分となり、また、 $Ax \leq b$  の解集合はいくつかの半空間の共通部分と見なせる。

ここで、 $H \subset \mathbb{R}^n$  が**超平面 (hyper plane)** であるとは、ある  $p \in \mathbb{R}^n (p \neq 0)$  と  $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p^T x = c\}$$

が成り立つ場合をいい、直感的には、全空間  $\mathbb{R}^n$  を超平面  $H$  で 2つの領域に分けている。また、 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p^T x \geq c\}$  や  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p^T x \leq c\}$  は、 $H$  によって 2つの領域に分割されたそれぞれを表している。これらを**半空間 (half space)** と呼んでいる。

よって、連立 1 次方程式  $Ax = b$  の解集合は、超平面の共通部分、即ち、ある線形部分空間（原点を通る直線や平面のような集合）か、部分空間を平行移動したもの（原点を通るとは限らないが、直線や平面のようなもので、これはアフィン集合と呼ばれている）となっている。

#### アフィン集合（アフィン部分空間）の定義

その集合に含まれる任意の 2つのベクトルのアフィン結合が、その集合の要素となっている場合をいう。つまり、「その集合内の任意の 2点を通る直線が、その集合に含まれている場合」をいう。即ち、数学的には次のようになる。 $X$  を実ベクトル空間とすると、その部分集合  $V \subset X$  が**アフィン集合**であるとは、

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in V \text{ and } t \in \mathbb{R}, \quad tx_1 + (1-t)x_2 \in V$$

#### (2) $Ax = b$ を行列 $A$ の列ベクトルの 1 次結合表現とみる方法

行列  $A$  を  $m \times n$  型で階数  $m$  ( $m < n$ ) とし、その列ベクトルを  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$  とすると、これらの中から 1 次独立な  $m$  個のベクトルを選ぶことができる。つまり、ベクトル空間  $\mathbb{R}^m$  の基底として選んでこれる。よって、 $\mathbb{R}^m$  のどのようなベクトルもそれらの 1 次結合で表現できるので、右辺の  $b$  も  $a_1, \dots, a_n$  の中の  $m$  個で表すことが可能となる。ただし、通常の線形計画問題では、変数  $x$  に非負条件  $x \geq 0$  が制約として付与されているので、簡単にその条件を満足するような 1 次独立な  $m$  個のベクトルを選び出すことは困難な場合もある。

しかし、その幾何学的な意味は、非常に美しい。一例を挙げると、 $Ax = b, x \geq 0$  をみたすベクトル  $x$  が存在するための必要十分条件は、「右辺のベクトル  $b$  が  $a_1, \dots, a_n$  から生成される凸錐に含まれること」である。

### 非負一次結合の定義

ベクトル  $x \in X$  が有限個の  $a_1, \dots, a_m \in X$  を用いて

$$x = c_1 a_1 + \dots + c_m a_m \quad (\text{ただし, } c_1, \dots, c_m \text{ は非負実数 } (c_k \geq 0 \text{ for } k = 1, \dots, m))$$

と表されるとき,  $x$  は  $a_1, \dots, a_m$  の非負一次結合 (nonnegative linear combination) あるいは, 凸錐結合 (convex conical combination) であるという。また,  $a_1, \dots, a_m$  の非負一次結合となる点全体を「 $a_1, \dots, a_m$  から生成される (張られる) 凸錐」という。

## 1.4 行基本変形とガウス行列

一般に, 連立 1 次方程式は行基本変形を利用して, 係数行列  $A$  をガウス行列へ変形することにより求めることができる。いずれの変形をどのような順番で使用しても, つまり, どのような変形をしても (等式変形に基づいているために), 解が求まる場合にはその答えは変わらないはずである。ただし, 連立 1 次方程式の解を見つける場合には, 行の交換は不要である。特に, シンプレックス法では行の交換はしないし, ガウス行列も意識しない。

### 変形の 3 法則 (行基本変形)

- ある 2 つの行を交換する。
- ある 1 つの行を定数倍する。(ただし, 0 倍すると式が消えるので, それは考えない。)
- ある行に他の行を定数倍したものを加える。

### ガウス行列

- (1) ある行が 0 以外の数を含めば, その行の成分を左から見ていくと最初の 0 でない数は 1 である。これを **初 (はつ) 1** という。
- (2) 0 でない成分をもつ 2 つの行については, 上の行の初 1 は下の行の初 1 より左にある。
- (3) 初 1 を含む列については, この列の他の成分はすべて 0 である。

行基本変形でガウス行列を求める方法を**掃き出し法**という。

**例 1.1.** 次の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

の係数行列を掃き出し法によってガウス行列へ変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & -3 & -3 & | & -18 \\ 0 & -1 & -1 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -1 & -1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$